Varianta 018

SUBIECTUL I

1.

a) $M\left(\frac{5}{2},1\right)$.

b) $C(7,7)$.

c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

d) $P(3,3)$

e) $S=\{2i,-2i\}$

f) $-\frac{6}{25}$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x\in(-\infty,-3]$.

b) -2 .

c) 2 .

d) 3 .

e) $\frac{4}{5}$.

2.

a) $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

b) $\frac{\pi}{4}$.

c) 1.

d) $f'(x)>0, \forall x\in$ **R.** Deci funcția f este strict crescătoare pe **R** .

e) $\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=O_2$.

Cum $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$,

atunci $\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Obținem $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,adevărat.

b)Fie $X \in M_2(\mathbf{Q}), X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$X^2 - 5I_2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz - 5 & xy + yt \\ xz + zt & yz + t^2 - 5 \end{pmatrix}$.

$X - \sqrt{5}I_2 = \begin{pmatrix} x - \sqrt{5} & y \\ z & t - \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

$X + \sqrt{5}I_2 = \begin{pmatrix} x + \sqrt{5} & y \\ z & t + \sqrt{5} \end{pmatrix}$.

$\left(X - \sqrt{5}I_2\right)\left(X + \sqrt{5}I_2\right) = \begin{pmatrix} x^2 - 5 + yz & xy - \sqrt{5}y + yt + \sqrt{5}y \\ xz + z\sqrt{5} + zt - \sqrt{5}z & yz + t^2 - 5 \end{pmatrix}$.

Deci $X^2 - 5I_2 = \left(X - \sqrt{5}I_2\right)\left(X + \sqrt{5}I_2\right)$.

c) $f\left(\sqrt{5}\right) = \sqrt{5}^2 - (a + d)\sqrt{5} + ad - bc = 0$ sau $(5 + ad - bc) = (a + d)\sqrt{5}$ **.**

Atunci $5 + ad - bc = 0$ şi $a + d = 0$**.**Am obținut $a + d = 0$ şi $ad - bc = -5$ **.**

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5$.

e)Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Avem $B^2 = 5I_2$.

f)Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$;

$XY = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$; $\det(XY) = adxt - adzy - bcxt + bczy$.

$\det X = ad - bc$.

$\det Y = xt - zy$.

$\det X \det Y = adxt - adzy - bcxt + bczy$.

Deci $\det(XY) = \det X \det Y, \ \forall X, Y \in M_2(\mathbf{Q})$.

g) $X^2 - 5I_2 = \left(X - \sqrt{5}I_2\right)\left(X + \sqrt{5}I_2\right)$, $\forall X \in M_2(\mathbf{Q})$,

iar $\det\left(X^2 - 5I_2\right) = \det\left(X - \sqrt{5}I_2\right)\det\left(X + \sqrt{5}I_2\right)$.

Cum $\det\left(X^2 - 5I_2\right) = 0$,obținem

$\det\left(X - \sqrt{5}I_2\right) = 0$ sau $\det\left(X + \sqrt{5}I_2\right) = 0$.

Fie X= $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, $x, y, z, t \in$ **Q.**

Atunci $X-\sqrt{5}I_2=\begin{pmatrix} x-\sqrt{5} & y \\ z & t-\sqrt{5}\end{pmatrix}$.

$\det\left(X-\sqrt{5}I_2\right)=xt-x\sqrt{5}-t\sqrt{5}+5-zy=0$ sau $xt-zy+5=(x+t)\sqrt{5}$.

Atunci $xt-zy+5=0$ şi $x+t=0$ .Deci , $xt-zy=-5$.

Dar $X^2-(x+t)X+(xt-zy)I_2=O_2$.Deci $X^2-5I_2=O_2$ sau $X^2=5I_2$.

Dacă $\det\left(X+\sqrt{5}I_2\right)=0$ se rezolvă in acelaşi mod.

SUBIECTUL IV

a) $f(-x)=3^{-x}+3^{x}=f(x)$.

b) $f'(x)=\ln 3\left(3^{x}-3^{-x}\right)$.

c) $f'(x)=0,$ rezultă. $x=0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Deci funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ şi strict crescătoare pe intervalul $[0,\infty)$.

d) $f(x)\geq 2$ este echivalentă cu $3^{x}+3^{-x}\geq 2$.

Din inegalitatea mediilor avem $m_a\geq m_g$ .Atunci

$3^{x}+3^{-x}\geq 2, \forall\ x\in \mathbf{R}$.

e) $f''(x)>0,\ \forall\ x\in\mathbf{R}$.Deci f este convexă pe **R**.

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{f(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3^{x}-3^{-x}}{\ln 3}}{3^{x}+3^{-x}}=\dfrac{1}{\ln 3}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{x}\left(1-3^{-2x}\right)}{3^{x}\left(1+3^{-2x}\right)}=\dfrac{1}{\ln 3}$.

g) Ecuația $f(x)+f\left(x^{27}\right)=f\left(x^{5}\right)+f\left(x^{2007}\right)$ devine

$3^{x}+3^{-x}+3^{x^{27}}+3^{-x^{27}}=3^{x^{5}}+3^{-x^{5}}+3^{x^{2007}}+3^{-x^{2007}}$.

Observăm că $x=1$ este soluție.

Dacă $x>1$, cum f strict crescătoare pe intervalul $(0,\infty)$,avem

$f(x)+f\left(x^{27}\right)<f\left(x^{5}\right)+f\left(x^{2007}\right), \forall x>1$.Atunci nu avem soluție in intervalul $(1,\infty)$.

Dacă $x\in(0,1)$ se procedează analog şi din nou nu avem soluție.

Deci $x=1$ este soluție unică.